Résumé du cours : Les séries

- Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- Si $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ ou n'existe pas, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est divergente

Séries à termes positifs

1) **Critère de comparaison** : Soient données deux séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ à termes positifs, si $0 < a_n \leq b_n$ à partir d'un $n \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$

alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ diverge}$$

Le critère de comparaison reste valable si on a au lieu de $0 \leq a_n \leq b_n$ à partir d'un rang n, mais $0 < a_n \leq \lambda b_n$ $\lambda > 0$.

2) Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$, $0 < \ell < +\infty$, les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sont de même nature

- **Critères de convergence**

Critère de Cauchy

Si à partir d'un certain rang

$\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

Règle de Cauchy

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow$

- $\ell < 1$ convergence
- $\ell > 1$ divergence
- $\ell = 1$ cas douteux.

Critère de D'Alembert

Si à partir d'un certain rang

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

Règle de D'Alembert

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow$

- $\ell < 1$ convergence
- $\ell > 1$ divergence
- $\ell = 1$ cas douteux

Remarque : Lorsque la règle de D'Alembert donne un cas douteux il en sera de même de la règle de Cauchy.
On préférera la règle de D'Alembert si (a_n) comporte des factorielles et celle de Cauchy s'il comporte des puissances $n^{ième}$.

Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

ETUDUP .com

- Règle "$n^\alpha a_n$"

i) Si pour $A>0$, $\exists \alpha > 1$ tel que $n>N \Rightarrow 0 < n^\alpha a_n < A$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

ii) Si pour $B>0$, $\exists \alpha \leq 1$ tel que $n>N \Rightarrow n^\alpha a_n > B > 0$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

- Règle de Duhamel

Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1_{-0}$, on met $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sous la forme $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\frac{\alpha_n}{n}}$

$\alpha_n > 0$

Si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = l \Rightarrow \begin{cases} l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ l = 1 \text{ cas douteux.} \end{cases}$

Séries alternées

Ce sont des séries dont le terme général est alternativement positif et négatif à partir d'un certain rang.

Théorème fondamental des séries alternées (Critère de Leibniz)

Pour qu'une série alternée converge, il suffit que son terme général tende vers zéro en décroissant.

Formule de Stirling au voisinage de $+\infty$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

ETUDUP .com

ETUSUP .com

Propriétés supplémentaires concernant les séries

1) Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont toutes majorées par un même nombre.

2) Propriété d'associativité et de commutativité

Soit (u_n) les termes positifs d'une série.

a) La nature et la somme éventuelle d'une série numérique à termes positifs ne sont pas modifiées si on regroupe ses termes pour les associer de manière quelconque. (associativité de la somme)

b) La nature et la somme éventuelle d'une série à termes positifs ne sont pas modifiées si on permute ses termes d'une manière quelconque (commutativité).

3) Règle d'Abel

Soit (v_n) une suite de nombres réels t.q. $S_n = v_0 + \dots + v_n$ soit bornée ; et soit (ε_n) une suite de nombres positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série $\sum \varepsilon_n v_n$ est convergente.

4) Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, u_n terme à signe quelconque, est dite absolument convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ est convergente

• Toute série absolument convergente est convergente

⚠ • l'inverse n'est pas toujours vrai, une série peut bien être convergente sans qu'elle soit absolument convergente.

Exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

Toute série absolument convergente vérifie les propriétés d'associativité et de commutativité.

Déf : Une série à termes réels de signe quelconque convergente mais non absolument convergente est appelée série semi-convergente.

et encore plus..